سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

۱

روش اول:

جملات سوم، پنجم و یازدهم دنبالهٔ حسابی جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. بنابراین $a_۵$ واسطهٔ هندسی $a_۳$ و $a_{۱۱}$ است.

$$a_۵^۲ = a_۳a_{۱۱} \Rightarrow (a+۴d)^۲ = (a+۲d)(a+۱۰d) \Rightarrow a^۲+۸ad+۱۶d^۲ = a^۲+۱۲ad+۲۰d^۲ \Rightarrow ۴ad=-۴d^۲ \xrightarrow{d\neq ۰} a=-d$$

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$q=\frac{a_۵}{a_۳}=\frac{a+۴d}{a+۲d}=\frac{۳d}{d}=۳$$

جملات دنبالهٔ هندسی به صورت $a_۳, a_۵, a_{۱۱}, a_n$ می‌باشند، بنابراین:

$$\frac{a_n}{a_{۱۱}}=q=۳ \Rightarrow \frac{a+(n-۱)d}{a+۱۰d}=\frac{(n-۲)d}{۹d}=۳ \Rightarrow n-۲=۲۷ \Rightarrow n=۲۹$$

روش دوم:

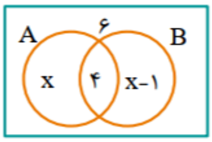
$$q=\frac{۱۱-۵}{۵-۳}=\frac{۶}{۲}=۳$$

ادامهٔ راه‌حل مانند روش اول است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲

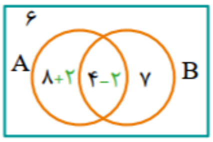
نمودار ون در حالت اولیه به صورت مقابل است:



خواهیم داشت:

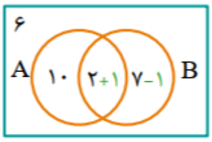
$$x+۴+x-۱+۶=۲۵ \Rightarrow ۲x=۱۶ \Rightarrow x=۸$$

پس از خروج دو نفر از اعضای مشترک از گروه B نمودار ون به صورت مقابل خواهد بود.



دقت کنید که با خروج این دو نفر از B، تعداد اعضای $A\cap B$ دو واحد کاهش و تعداد اعضای $A-B$ دو واحد افزایش خواهد داشت. در واقع این ۲ نفر در حال حاضر فقط عضو A هستند.

در مرحلهٔ آخر ۱ نفر از قسمت $B-A$ به $A\cap B$ منتقل می‌شود.



در حال حاضر، تعداد اعضای $A-B$ برابر ۱۰ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳

دنبالهٔ حسابی به صورت مقابل است:

$$۷, a_۱, a_۲, a_۳, x$$

$$a_۳^۲-a_۱^۲=۱۵۶ \Rightarrow (a_۳-a_۱)(a_۳+a_۱)=۱۵۶ \Rightarrow ۲d(x+۷)=۱۵۶ \Rightarrow \frac{x-۷}{۲}(x+۷)=۱۵۶$$

$$\Rightarrow x^۲-۴۹=۳۱۲ \Rightarrow x^۲=۳۶۱ \Rightarrow x=۱۹$$

خواهیم داشت:

$$x=۷+۴d=۱۹ \Rightarrow d=۳ \Rightarrow a_۱=۱۰, a_۲=۱۳$$

بنابراین:

$$a_۱^۲+a_۲^۲=۲۶۹$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴

نکته: جملهٔ n ام یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت d به‌صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

دنبالهٔ اعداد طبیعی که در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۵ دارند را با a_n نمایش می‌دهیم. a_n یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۷ است که جملهٔ اول آن برابر ۵ است. این دنباله به‌صورت زیر است:

$$۵, ۱۲, ۱۹, \cdots \Rightarrow a_n = ۵ + (n-۱)۷ \Rightarrow a_n = ۷n - ۲$$

حال اگر بخواهیم اعداد سه‌رقمی این دنباله را پیدا کنیم، باید نامعادلات زیر را حل کنیم:

$$a_n \geq ۱۰۰ \Rightarrow ۷n - ۲ \geq ۱۰۰ \Rightarrow ۷n \geq ۱۰۲ \Rightarrow n \geq ۱۴/۵ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq ۱۵$$

$$a_n \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۷n - ۲ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۷n \leq ۱۰۰۱ \Rightarrow n \leq ۱۴۳$$

بنابراین $۱۵ \leq n \leq ۱۴۳$. تعداد اعداد طبیعی که به‌جای n می‌توان قرار دارد، برابر $۱۴۳ - ۱۵ + ۱ = ۱۲۹$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵

نکته: اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعداد n واسطهٔ هندسی درج کنیم، می‌توان a را جملهٔ اول و b را جملهٔ $(n+۲)$اُم در نظر گرفت:

$$\underbrace{a, \ldots\ldots\ldots, b}_{\text{n جمله}}$$

a ↓ جملهٔ اول، b ↓ جملهٔ $(n+۲)$اُم

نکته: جمله n‌اُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جملهٔ اول و r قدرنسبت می‌باشد. $(t_1, r \neq ۰)$

اگر دنبالهٔ هندسی را t_n بنامیم، t_1 برابر ۵ و t_7 برابر ۳۲۰ است.

$$\underset{t_1}{۵}, \underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc}_{\text{۵ واسطه}}, \underset{t_7}{۳۲۰}$$

$$t_7 = t_1 \times r^۶ \Rightarrow ۳۲۰ = ۵ \times r^۶ \Rightarrow r^۶ = ۶۴ \Rightarrow r = \pm ۲$$

بنابراین دو حالت زیر برای ۵ واسطهٔ هندسی امکان‌پذیر است:

$r = ۲ : ۵, \underline{۱۰}, \underline{۲۰}, \underline{۴۰}, \underline{۸۰}, \underline{۱۶۰}, ۳۲۰ \Rightarrow$ مجموع واسطه‌ها $= ۱۰ + ۲۰ + ۴۰ + ۸۰ + ۱۶۰ = ۳۱۰$

$r = -۲ : ۵, -۱۰, ۲۰, -۴۰, ۸۰, -۱۶۰, ۳۲۰ \Rightarrow$ مجموع واسطه‌ها $= (-۱۰) + ۲۰ + (-۴۰) + ۸۰ + (-۱۶۰) = -۱۱۰$

با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۱ پاسخ است.

تذکر: اگر $t_1 = ۳۲۰$ و $t_7 = ۵$ در نظر بگیریم، جواب‌های مسئله تغییر نمی‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶

نکته: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

اگر کل گروه‌های جام جهانی را $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ در نظر بگیریم، مجموعهٔ گروه‌های شامل تیمی از آسیا را A و مجموعهٔ گروه‌های شامل تیمی از افریقا را B می‌نامیم. با توجه به سؤال می‌دانیم $n(A) = n(B) = ۵$. ضمناً می‌دانیم در یکی از گروه‌ها تیمی از آسیا و افریقا حضور ندارد. پس:

$$n(A \cup B) = ۸ - ۱ = ۷$$

سؤال از ما تعداد گروه‌های شامل تیمی از آسیا و تیمی از افریقا را خواسته که همان $A \cap B$ است، پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۷ = ۵ + ۵ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷

راه‌حل اول:

نکته: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

نکته: جملهٔ nاُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=t_1r^{n-1}$ است که در آن t_1 جملهٔ اول و r قدرنسبت است. $(t_1,r\neq 0)$

با توجه به نکته، حاصل‌ضرب نُه جملهٔ اول برابر است با:

$$t_1t_2\cdots t_9=t_1\times t_1r\times t_1r^2\times\cdots\times t_1r^8=t_1^9\times r^{1+2+\cdots+8}=t_1^9\times r^{\frac{8\times 9}{2}}=t_1^9\times r^{4\times 9}$$

$$\Rightarrow t_1t_2\cdots t_9=(t_1r^4)^9\Rightarrow (t_1r^4)^9=27\Rightarrow t_1r^4=\sqrt[9]{27}=\sqrt[3]{3}\qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$t_2t_4t_6t_8=(t_1r)(t_1r^3)(t_1r^5)(t_1r^7)=t_1^4\times r^{(1+3+5+7)}\Rightarrow t_2t_4t_6t_8=t_1^4r^{16}$$

$$\Rightarrow t_2t_4t_6t_8=(t_1r^4)^4\overset{(*)}{=}(\sqrt[3]{3})^4=3\sqrt[3]{3}$$

راه‌حل دوم:

با توجه به اینکه تعداد جملات در حاصل‌ضرب نُه جمله، فرد است، می‌توان جملهٔ وسط یعنی t_5 را در نظر گرفت و جملات بعدی و قبلی را به‌صورت ضرب t_5 در توان‌های r و تقسیم t_5 بر توان‌های r نوشت:

$$\Rightarrow t_1t_2\cdots t_9=\frac{t_5}{r^4}\times\frac{t_5}{r^3}\times\frac{t_5}{r^2}\times\frac{t_5}{r}\times t_5\times(t_5r)\times t_5r^2\times t_5r^3\times t_5r^4=(t_5)^9=(t_1r^4)^9$$

$$(t_1r^4)^9\overset{\text{طبق فرض}}{=}27\Rightarrow t_1r^4=\sqrt[9]{27}=\sqrt[3]{3}\qquad (*)$$

$$t_2t_4t_6t_8=(t_1r)(t_1r^3)(t_1r^5)(t_1r^7)=t_1^4r^{16}\Rightarrow t_2t_4t_6t_8=(t_1r^4)^4\overset{(*)}{=}(\sqrt[3]{3})^4=3\sqrt[3]{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸

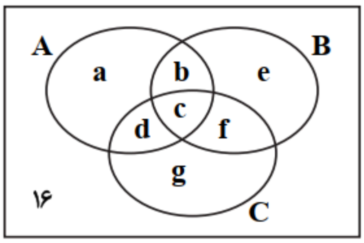
اگر محصولات کشاورزی را با مجموعه‌های A، B و C نمایش دهیم، به‌کمک نمودار داریم:

$a+e+g=$ تعداد افرادی که فقط یک محصول دارند.

$b+d+f=$ تعداد افرادی که فقط دو محصول دارند.

$c=$ تعداد افرادی که هر ۳ محصول را دارند.

$n(U)=100$



با توجه به شرایط مسئله داریم:

$$a+e+g=4(b+d+f)=2c\qquad (*)$$

$$n(A\cup B\cup C)=100-16=84\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g=84$$

$$\Rightarrow (a+e+g)+(b+d+f)+c=84$$

$$\xrightarrow{(*)} 2c+\frac{c}{2}+c=84\Rightarrow \frac{7c}{2}=84\Rightarrow c=24$$

یعنی ۲۴ نفر هر ۳ محصول را دارند.

افرادی که حداکثر ۲ محصول دارند، یعنی افرادی که هر ۳ محصول را با هم ندارند که تعداد آن‌ها برابر $100-24=76$ نفر است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹ نکته: جملهٔ عمومی الگوی درجه‌دوم به‌صورت $(a\neq ۰)$ $a_n = an^۲ + bn + c$ است.

با توجه به رابطهٔ $a_{n+۱} - a_n = ۴n + ۱$ داریم:

$$n = ۱ \Rightarrow a_۲ - a_۱ = ۴(۱) + ۱ = ۵ \xrightarrow{a_۱=۲} a_۲ - ۲ = ۵ \Rightarrow a_۲ = ۷$$

$$n = ۲ \Rightarrow a_۳ - a_۲ = ۴(۲) + ۱ = ۹ \xrightarrow{a_۲=۷} a_۳ - ۷ = ۹ \Rightarrow a_۳ = ۱۶$$

اکنون با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجه‌دوم $a_n = an^۲ + bn + c$ داریم:

$$a_۱ = a + b + c = ۲ \qquad (۱)$$

$$a_۲ = ۴a + ۲b + c = ۷ \qquad (۲)$$

$$a_۳ = ۹a + ۳b + c = ۱۶ \qquad (۳)$$

$$\begin{cases}(۲)-(۱) \Rightarrow ۳a + b = ۵\\ (۳)-(۲) \Rightarrow ۵a + b = ۹\end{cases} \xrightarrow{(-)} a = ۲ \ ,\ b = -۱ \ ,\ c = ۱ \Rightarrow a_n = ۲n^۲ - n + ۱$$

حالا جملهٔ دهم را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۰} = ۲۰۰ - ۱۰ + ۱ = ۱۹۱$$

راه‌حل دوم:

با فرض اینکه $a_n = an^۲ + bn + c$ باشد، داریم:

$$a_{n+۱} = a(n+۱)^۲ + b(n+۱) + c = an^۲ + ۲an + a + bn + b + c = an^۲ + bn + c + ۲an + a + b$$

$$a_{n+۱} - a_n = ۴n + ۱ \Rightarrow ۲an + a + b = ۴n + ۱ \Rightarrow \begin{cases}۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲\\ a + b = ۱ \xrightarrow{a=۲} b = -۱\end{cases} \Rightarrow a_n = ۲n^۲ - n + c$$

$$a_۱ = ۲ \Rightarrow ۲ - ۱ + c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow a_n = ۲n^۲ - n + ۱ \xrightarrow{n=۱۰} a_{۱۰} = ۱۹۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰ نکته: جملهٔ nاُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ است که در آن $t_۱$ جملهٔ اول و r قدرنسبت است $(t_۱, r \neq ۰)$.

q، قدرنسبت دنباله، عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک و جملات دنباله عضو مجموعهٔ A هستند، پس جملهٔ اول دنباله عددی طبیعی است. از طرفی دنباله شامل ۶ جمله است، بنابراین حداکثر q برابر ۳ است؛ زیرا:

$$t_۶ = t_۱ q^۵ \xrightarrow{t_۱=۱} \text{بزرگ‌ترین مقدار } q^۵ \text{ می‌تواند برابر ۲۵۰ باشد.} \Rightarrow q^۵ \leq ۲۵۰ \xrightarrow[۳^۵=۲۴۳]{۴^۵=۱۰۲۴} q \leq ۳$$

اکنون حالات مختلف را بررسی می‌کنیم:

$$q = ۲ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱ \Rightarrow ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲ \checkmark\\ t_۱ = ۲ \Rightarrow ۲, \ldots, ۶۴ \checkmark\\ \vdots\\ t_۱ = ۷ \Rightarrow ۷, ۱۴, ۲۸, ۵۶, ۱۱۲, ۲۲۴ \checkmark\\ t_۱ = ۸ \Rightarrow ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴, ۱۲۸, ۲۵۶ \times \end{cases}$$

$$q = ۳ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱ \Rightarrow ۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳ \checkmark\\ t_۱ = ۲ \Rightarrow ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ۱۶۲, ۴۸۶ \times \end{cases}$$

بنابراین ۸ دنبالهٔ هندسی با شرایط مسئله وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱ سرنخ وقتی اعضای B تغییر نمی کنه می تونیم بگیم این عضو دلخواه در مجموعهٔ B هم بوده پس می‌شه گفت $A \subseteq B$ است.

پله اول: با اضافه کردن هر عضو A به B، تعداد اعضای B تغییر نمی‌کند. پس $A \subseteq B$ است.

$$B' - A' = B' \cap A = A \cap B' = A - B \xrightarrow{A \subseteq B} \begin{cases} A - B = \varnothing \\ A \cup B = B \end{cases}$$

پله دوم:

$$C \subseteq A \subseteq B \to C \subseteq B \to B \cup C = B$$

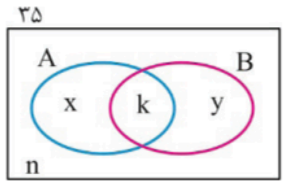
$$(B' - A') \cup (B \cup C)' = \varnothing \cup B' = B'$$

بنابراین متمم عبارت $(B' - A') \cup (B \cup C)'$ برابر است با:

$$\left((B' - A') \cup (B \cup C)'\right)' = (B')' = B = A \cup B$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲ پله اول: با رسم نمودار ون خواهیم داشت:



تیم فوتبال : A

تیم والیبال: B

تعداد افرادی که فقط متعلق به تیم فوتبال هستند: x

تعداد افرادی که فقط متعلق به تیم والیبال هستند: y

$$x + y + k + n = ۳۵ \xrightarrow{\text{طبق } (۱)} ۴k + n = ۳۵$$

$$\begin{matrix} k = \frac{۱}{۳}(x+y) \Rightarrow \\ x = \frac{۱}{۲}(y+k) \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x + y = ۳k \\ y + k = ۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۴}{۳}k \\ y = \frac{۵}{۳}k \end{cases} \qquad (۱)$$

پله دوم: می‌دانیم تعداد افراد، باید عددی طبیعی باشد بنابراین k باید مضرب ۳ باشد:

$$۴k + n = ۳۵ \Rightarrow \begin{cases} k = ۳ \Rightarrow n = ۲۳ \Rightarrow k \times n = ۶۹ \\ k = ۶ \Rightarrow n = ۱۱ \Rightarrow k \times n = ۶۶ \\ k = ۹ \Rightarrow n = -۱ \times \end{cases} \Rightarrow \max(k \times n) = ۶۹$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳ سرنخ اختلاف تعداد دایره ها در شکل های متوالی، تشکیل دنباله حسابی می‌دهند پس دنباله از نوع درجهٔ دوم است.

پله اول:

جملهٔ عمومی به صورت $an^{۲}+bn+c$ می‌باشد:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد دایره ها	۱	۳	۶	۱۰
		۲	۳	۴
			۱	۱

$$۲a=\text{اختلافِ اختلاف جملات}\Rightarrow ۲a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$b=(a_{۲}-a_{۱})-۳a\Rightarrow b=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}n^{۲}+\frac{۱}{۲}n+C\xrightarrow[a_n=۱]{n=۱}\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+C=۱\Rightarrow C=۰$$

بنابراین:

$$a_n=\frac{۱}{۲}n^{۲}+\frac{۱}{۲}n$$

پله دوم:

$$\text{تعداد دایره ها در شکل } m \text{ ام}=\frac{۱}{۲}m^{۲}+\frac{۱}{۲}m$$

$$\text{تعداد دایره ها در شکل } n \text{ ام}=\frac{۱}{۲}n^{۲}+\frac{۱}{۲}n$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}m^{۲}+\frac{۱}{۲}m=\frac{۱}{۲}n^{۲}+\frac{۱}{۲}n+۲۵$$

$$\xrightarrow{\times ۲}m^{۲}+m=n^{۲}+n+۵۰\Rightarrow m^{۲}-n^{۲}+m-n=۵۰$$

$$\Rightarrow(m+n)(m-n)+m-n=۵۰$$

$$\Rightarrow\underbrace{(m-n)}_{a}\underbrace{(m+n+۱)}_{b}=۵۰\Rightarrow a\times b=۵۰,b>a$$

پله سوم:

$$۵۰=۱\times ۵۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=۵۰\end{cases}\Rightarrow a+b=۵۱\Rightarrow ۲m+۱=۵۱\Rightarrow\begin{matrix}m=۲۵\\n=۲۴\end{matrix}$$

$$۲\times ۲۵\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=۲۵\end{cases}\Rightarrow a+b=۲۷\Rightarrow ۲m+۱=۲۷\Rightarrow\begin{matrix}m=۱۳\\n=۱۱\end{matrix}$$

$$۵\times ۱۰\Rightarrow\begin{cases}a=۵\\b=۱۰\end{cases}\Rightarrow a+b=۱۵\Rightarrow ۲m+۱=۱۵\Rightarrow\begin{matrix}m=۷\\n=۲\end{matrix}$$

$$\text{مجموع مقادیر } m\Rightarrow ۲۵+۱۳+۷=۴۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴ چند جمله اول دنباله را می‌نویسیم:

$$a_1=3 \qquad a_2=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3} \qquad a_3=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}\rightarrow a_n=\frac{2n+1}{2n-1}$$

و درنتیجه داریم:

$$a_1\times a_2\times\ldots\times a_{50}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\ldots\times\frac{101}{99}=101$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۵ اعداد آخر هر دسته ، تشکیل دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۲ و قدر نسبت ۲ می‌دهند. یعنی $2,4,8,16,\ldots$. پس عدد آخر دستهٔ nاُم از رابطهٔ 2^n به دست می‌آید. حال چون عدد آخر دستهٔ دوازدهم برابر با 2^{12} است، پس عدد اول دستهٔ سیزدهم برابر $2^{12}+1$ و عدد آخر دستهٔ سیزدهم برابر با 2^{13} است. چون اعضای هر دستهٔ اعداد طبیعی متوالی‌اند، پس میانهٔ اعداد دستهٔ سیزدهم برابر با میانگین عدد اول و آخر این دسته است:

$$=\frac{2^{12}+1+2^{13}}{2}=\frac{2^{12}+2^{13}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2^{12}(1+2)}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=3\times2^{11}+0/5=6144/5$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶ توجه کنید که:

$$a_3a_5+a_3a_7+a_5a_9+a_7a_9=0$$

$$a_3(a_5+a_7)+a_9(a_5+a_7)=0$$

$$(a_5+a_7)(a_3+a_9)=0$$

$$(2a_6)(2a_6)=0\Rightarrow a_6=0$$

چون قدر نسبت منفی است، پس $a_5>0$ و $a_7<0$ است. بنابراین اولین جملهٔ منفی a_7 است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷ پاسخ تشریحی راه اول: با کمی دقت جملهٔ آخر دسته‌ها به ترتیب 2^1، 2^2، 2^3، 2^4 و ... هستند؛ پس جملهٔ آخر دستهٔ دهم 2^{10} و جملهٔ آخر دستهٔ یازدهم 2^{11} است؛ یعنی دستهٔ یازدهم از $2^{10}+1$ تا 2^{11} خواهد بود که اختلاف آن‌ها می‌شود: $\underbrace{2^{11}-2^{10}}_{2^{10}(2-1)}-1=2^{10}-1$.

راه دوم: سراغ اختلاف بیشترین و کم‌ترین عدد هر دسته می‌رویم. این اختلاف در دستهٔ اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب ۱، ۱، ۳ و ۷ است. با کمی دقت بیشتر، می‌بینیم که این اعداد (البته به‌جز اولی) از رابطهٔ $2^{(\text{شمارهٔ جمله}-1)}-1$ پیروی می‌کنند.

$$\underset{\text{استثنا}}{\underset{\downarrow}{1}}\ ,\ \overset{2^1-1}{\overset{\uparrow}{1}}\quad \underset{2^2-1}{\underset{\downarrow}{3}}\ ,\ \overset{2^3-1}{\overset{\uparrow}{7}}$$

پس در دستهٔ یازدهم اختلاف برابر است با $2^{10}-1$ که برابر با ۱۰۲۳ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸

پاسخ تشریحی **گام اول**: در صورت سؤال داریم:

$$a_۳ + a_۷ = ۴۸$$
$$a_۷ - a_۳ = ۱۶$$

دقت کنید که چون هر جمله از قبلی بزرگ‌تر است $d > ۰$ و باید اختلاف را به صورت $a_۷ - a_۳$ بنویسیم.

گام دوم: از جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a_n = a_۱ + (n-۱)d$، استفاده می‌کنیم و داریم:

$$a_۱ + ۶d - (a_۱ + ۲d) = ۴d = ۱۶ \Rightarrow d = ۴$$

$$a_۱ + ۲d + a_۱ + ۶d = ۲a_۱ + ۸d = ۴۸ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} ۲a_۱ + ۸(۴) = ۴۸ \Rightarrow ۲a_۱ = ۱۶ \Rightarrow a_۱ = ۸$$

گام سوم: حالا با $a_۱$ و d، فرم جملهٔ عمومی را می‌نویسیم:

$$a_n = ۸ + ۴(n-۱) = ۴n + ۴$$

گام چهارم: با قراردادن $a_n \geq ۱۰۰$ به شمارهٔ اولین جملهٔ سه‌رقمی می‌رسیم:

$$۴n + ۴ \geq ۱۰۰ \xrightarrow{-۴} ۴n \geq ۹۶ \xrightarrow{\div ۴} n \geq ۲۴$$

پس اولین جملهٔ سه‌رقمی، جملهٔ بیست‌وچهارم است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹

پاسخ تشریحی **گام اول**: جملات دنبالهٔ هندسی را $a_۱$ و $a_۲ = a_۱r$ و $a_۳ = a_۱r^۲$ در نظر می‌گیریم؛ پس طبق صورت سؤال $a_۱r^۲$ و x و $a_۱r$ و $a_۱$ جملات دنبالهٔ حسابی هستند و $r \neq ۱$ و $a_۱ \neq ۰$ است، چون دنباله ثابت نیست.

گام دوم: از شرط تشکیل دنبالهٔ حسابی داریم:

$$a_۱ \;,\; a_۱r \;,\; x \;,\; a_۱r^۲ \quad (+d,\ +d,\ +d)$$

$$d = a_۱r - a_۱ = x - a_۱r = a_۱r^۲ - x \xrightarrow{\div a_۱} r - ۱ = \frac{x}{a_۱} - r = r^۲ - \frac{x}{a_۱}$$

گام سوم: حالا به جای $\frac{x}{a_۱}$، k قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

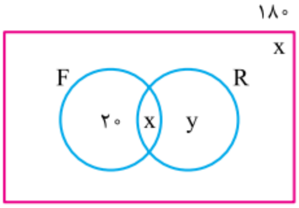
$$\underbrace{r - ۱ = k - r}_{k = ۲r - ۱} = r^۲ - k \xrightarrow[k=۲r-۱]{\text{جای‌گذاری}} r^۲ - (۲r - ۱) = r - ۱$$

$$\Rightarrow r^۲ - ۳r + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow r = ۱ \text{ یا } ۲$$
$$\Rightarrow k = ۱ \text{ یا } ۳$$

اما در صورت سؤال گفته بود غیرثابت و نتیجه گرفتیم $r \neq ۱$، پس فقط $r = ۲$ و $k = ۳$ قابل قبول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰ پاسخ تشریحی **گام اول**: با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال، نمودار ون زیر را رسم می‌کنیم. تعداد علاقه‌مندان به هر دو درس را x فرض می‌کنیم، پس تعداد کسانی که به هیچ‌یک از دو درس علاقه ندارند نیز x است. ضمناً تعداد علاقه‌مندان به هر دو درس، از تعداد علاقه‌مندان به فیزیک ۲۰تا کم‌تر است، یعنی ۲۰ نفر هستند که فقط به فیزیک علاقه دارند. تعداد کسانی که فقط به ریاضی علاقه دارند را نیز y در نظر می‌گیریم.



F: علاقه‌مندان به فیزیک

R: علاقه‌مندان به ریاضی

گام دوم: تعداد کل دانش‌آموزان مدرسه ۱۸۰ نفر است، پس:

$$۲۰ + x + y + x = ۱۸۰ \Rightarrow ۲x + y = ۱۶۰ \quad (۱)$$

گام سوم: تعداد علاقه‌مندان به ریاضی، ۳ برابر تعداد علاقه‌مندان به فیزیک است، پس:

$$x + y = \underbrace{۳(x + ۲۰)}_{۳x+۶۰} \Rightarrow ۲x - y = -۶۰ \quad (۲)$$

گام چهارم: دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، شامل معادلات (۱) و (۲) را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۲x + y = ۱۶۰ \\ ۲x - y = -۶۰ \end{cases}$$

جمع: $۴x = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۲۵ \,,\, ۲ \times ۲۵ - y = -۶۰ \Rightarrow y = ۱۱۰$

گام پنجم: تعداد علاقه‌مندان به ریاضی برابر با $x + y = ۲۵ + ۱۱۰ = ۱۳۵$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۱ این‌ها دنبالهٔ حسابی‌اند:

$$a-b, a+b, \frac{a}{b}, a\times b$$

قدرنسبت برابر است با:

$$d=a+b-(a-b)=۲b$$

جملات سوم و چهارم را به کمک قدرنسبت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} t_۳=\frac{a}{b}=a+b+۲b=a+۳b \Rightarrow \frac{a}{b}-a=۳b \\ t_۴=ab=a+b+۴b=a+۵b \Rightarrow ab-a=۵b \end{cases}$$

از تقسیم دو رابطه داریم:

$$\frac{\frac{a}{b}-a}{ab-a}=\frac{\frac{۱}{b}-۱}{b-۱}=\frac{۳}{۵}$$

$$\xrightarrow[\times b]{\times b} \frac{۱-b}{b(b-۱)}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{-۱}{b}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow b=-\frac{۵}{۳}$$

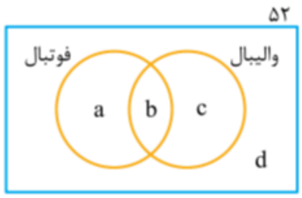
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} a=\frac{۵b}{b-۱}=\frac{۵(-\frac{۵}{۳})}{-\frac{۵}{۳}-۱}=\frac{-\frac{۲۵}{۳}}{-\frac{۸}{۳}}=\frac{۲۵}{۸}$$

حالا مقدار جملهٔ پنجم:

$$t_۵=t_۱+۴d=a-b+۴(۲b)=a+۷b=\frac{۲۵}{۸}+۷(\frac{-۵}{۳})=\frac{۲۵}{۸}-\frac{۳۵}{۳}=\frac{۷۵-۲۸۰}{۲۴}=-\frac{۲۰۵}{۲۴}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۲ پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا نمودار ون سؤال را رسم می‌کنیم:



گام دوم: افرادی که حداقل به یکی از دو ورزش فوتبال یا والیبال علاقه دارند، اعضای مجموعهٔ (فوتبال)$\cup$(والیبال) هستند که تعداد آن‌ها برابر با $a+b+c$ است؛ همچنین تعداد کل افراد کلاس برابر $a+b+c+d$ است، پس:

$$a+b+c+d=۵۲ \quad (۱)$$
$$a+b+c=۲۳ \quad (۲)$$

گام سوم: افرادی که حداکثر به یکی از این دو ورزش علاقه دارند، اعضای مجموعهٔ $'$((فوتبال)$\cap$(والیبال)) هستند که تعداد آن‌ها برابر با $a+c+d$ است و افرادی که به هر دو ورزش علاقه دارند، اعضای مجموعهٔ (والیبال)$\cap$(فوتبال) هستند که تعداد آن‌ها برابر با b است؛ پس طبق صورت سؤال داریم:

$$a+c+d=۳b \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (۱)}} \underbrace{a+c+d}_{۳b}+b=۵۲ \Rightarrow ۴b=۵۲ \Rightarrow b=۱۳ \quad (۳)$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال $a+c$ است. با جای‌گذاری (۳) در (۲) داریم:

$$a+b+c=۲۳ \xrightarrow{b=۱۳} a+۱۳+c=۲۳ \Rightarrow a+c=۱۰$$

پس تعداد افرادی که فقط به یکی از این دو ورزش علاقه دارند، برابر با ۱۰ نفر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۳ روش اول:

$a_۶, a_{۱۱}, a_{۲۶}$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند، بنابراین:

$$a_{۱۱}^۲ = a_۶ a_{۲۶} \to (a+۱۰d)^۲ = (a+۵d)(a+۲۵d) \to a^۲+۲۰ad+۱۰۰d^۲ = a^۲+۳۰ad+۱۲۵d^۲$$

$$\to ۱۰ad+۲۵d^۲ = ۰ \to ۵d(۲a+۵d)=۰ \xrightarrow[d\neq ۰]{\text{دنباله حسابی غیرثابت است}} ۲a+۵d=۰$$

$$\to (a+۲d)+(a+۳d)=۰ \to a_۳+a_۴=۰ \to a_۳=-a_۴$$

اگر $d<۰$ باشد، آنگاه سه جملهٔ اول دنباله مثبت و بقیهٔ جملات منفی هستند که با توجه به مثبت بودن جملات ششم، یازدهم و بیست و ششم امکان ندارد. در نتیجه $d>۰$ بوده و سه جملهٔ ابتدایی دنباله منفی هستند.

روش دوم:

$$q=\frac{۲۶-۱۱}{۱۱-۶}=\frac{۱۵}{۵}=۳ \to q=\frac{a_{۱۱}}{a_۶}=\frac{a+۱۰d}{a+۵d}=۳ \to ۲a+۵d=۰$$

ادامه راه‌حل مانند روش اول است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۴ **نکته: جملهٔ nام یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به‌صورت $t_n=t_۱+(n-۱)d$ است.**

نکته: اگر تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d، فرد باشد، می‌توان جملهٔ وسط را a و سایر جملات را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\cdots, a-۲d, a-d, a, a+d, a+۲d, \cdots$$

با توجه به نکته، چون تعداد جملات فرد است، پس می‌توان این اعداد را به‌صورت $a-۲d, a-d, a, a+d, a+۲d$ نوشت.

طبق فرض مجموع این پنج عدد برابر ۵۵ است، پس:

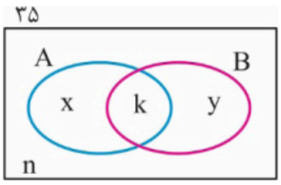
$$(a-۲d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+۲d)=۵۵ \Rightarrow ۵a=۵۵ \Rightarrow a=۱۱$$

$$((a+۲d)+(a+d)+a)=۴/۵((a-۲d)+(a-d)) \Rightarrow ۳a+۳d=\frac{۹}{۲}(۲a-۳d) \Rightarrow a+d=\frac{۳}{۲}(۲a-۳d)$$

$$\xrightarrow{a=۱۱} ۱۱+d=\frac{۳}{۲}(۲۲-۳d) \Rightarrow ۲۲+۲d=۶۶-۹d \Rightarrow ۱۱d=۴۴ \Rightarrow d=۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۵ **پله اول:** با رسم نمودار ون خواهیم داشت:



A : تیم فوتبال

B: تیم والیبال

x: تعداد افرادی که فقط متعلق به تیم فوتبال هستند.

y: تعداد افرادی که فقط متعلق به تیم والیبال هستند.

$$x+y+k+n=۳۵ \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} ۴k+n=۳۵$$

$$\begin{matrix} k=\frac{۱}{۳}(x+y) \Rightarrow \\ x=\frac{۱}{۲}(y+k) \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x+y=۳k \\ y+k=۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۴}{۳}k \\ y=\frac{۵}{۳}k \end{cases} \qquad (۱)$$

پله دوم: می‌دانیم تعداد افراد، باید عددی طبیعی باشد بنابراین k باید مضرب ۳ باشد:

$$۴k+n=۳۵ \Rightarrow \begin{cases} k=۳ \Rightarrow n=۲۳ \Rightarrow k\times n=۶۹ \\ k=۶ \Rightarrow n=۱۱ \Rightarrow k\times n=۶۶ \\ k=۹ \Rightarrow n=-۱ \times \end{cases} \Rightarrow \max(k\times n)=۶۹$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۶ اعداد آخر هر دسته ، تشکیل دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۲ و قدر نسبت ۲ می‌دهند. یعنی ...,۲,۴,۸,۱۶ . پس عدد آخر دستهٔ nاُم از رابطهٔ ۲^n به دست می‌آید. حال چون عدد آخر دستهٔ دوازدهم برابر با $۲^{۱۲}$ است، پس عدد اول دستهٔ سیزدهم برابر $۲^{۱۲}+۱$ و عدد آخر دستهٔ سیزدهم برابر با $۲^{۱۳}$ است. چون اعضای هر دستهٔ اعداد طبیعی متوالی‌اند، پس میانهٔ اعداد دستهٔ سیزدهم برابر با میانگین عدد اول و آخر این دسته است:

$$=\frac{۲^{۱۲}+۱+۲^{۱۳}}{۲}=\frac{۲^{۱۲}+۲^{۱۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲^{۱۲}(۱+۲)}{۲}+\frac{۱}{۲}=۳\times۲^{۱۱}+۰/۵=۶۱۴۴/۵$$

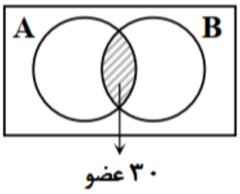
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۷ نکته: $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ، $(A')'=A$ ، $A-B=A\cap B'$ ، $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: با توجه به نکته: $n(A\cup B)=۴۰+۶۰-۳۰=۷۰$، بنابراین: $n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=۱۰۰-۷۰=۳۰$

گزینهٔ ۲: باتوجه به نمودار ون: $n(A'\cap B)=n(B-A)=۴۰-۳۰=۱۰$



گزینهٔ ۳: با توجه به نمودار ون مشخص است که: $n(A\cap B')=n(A-B)=۶۰-۳۰=۳۰$

گزینهٔ ۴:
$$(A'\cup B')'=(A')'\cap(B')'=A\cap B$$
$$n((A'\cup B')')=n(A\cap B)=۳۰$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۸ نکته: اگر سه عدد a، b و c به‌ترتیب:

۱) تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند: $۲b=a+c$

۲) تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند: $b^۲=ac$

$۲,a,b$ تشکیل دنبالهٔ هندسی و $a,b,۱۲$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، پس:

$$\begin{cases}\text{دنبالهٔ هندسی } ۲,a,b: a^۲=۲b\\ \text{دنبالهٔ حسابی } a,b,۱۲: ۲b=a+۱۲\end{cases}\Rightarrow a^۲=a+۱۲\Rightarrow a^۲-a-۱۲=۰\Rightarrow(a-۴)(a+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۴ \checkmark\\ a=-۳ \times\end{cases}$$

$$a^۲=۲b\xrightarrow{a=۴}b=۸$$

$$ab=۴\times۸=۳۲$$

گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۹ **با توجه به فرض سؤال داریم:**

$$a_1^2 \times a_1 r^5 + (a_1 r)^4 = 2a_1^2 (a_1 r)^3 \Rightarrow a_1^3 r^5 + a_1^4 r^4 = 2a_1^5 r^3 \xrightarrow{\div a_1^3 r^3} r^2 + a_1 r = 2a_1^2 \Rightarrow r^2 + a_1 r - 2a_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow (r + 2a_1)(r - a_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r + 2a_1 = 0 \Rightarrow r = -2a_1 \quad (1) \\ r - a_1 = 0 \Rightarrow r = a_1 \quad (2) \end{cases}$$

اکنون خواستهٔ سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a_2}{a_1^2} = \frac{a_1 r}{a_1^2} = \frac{r}{a_1} \xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} \begin{cases} \dfrac{r}{a_1} = \dfrac{-2a_1}{a_1} = -2 \\ \dfrac{r}{a_1} = \dfrac{a_1}{a_1} = 1 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۰ **در هر دنبالهٔ هندسی، نسبت جملات متوالی ثابت است، پس:**

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow \frac{3x-10}{4-x} = \frac{x}{3x-2} \Rightarrow (3x-10)(3x-2) = x(4-x) \Rightarrow 9x^2 - 30x - 6x + 20 = 4x - x^2$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 40x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2 = 4x - x^2 \Rightarrow x(4-x) = 2 \quad (*)$$

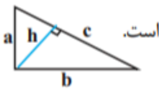
ضمناً برای به‌دست آوردن جملهٔ پنجم، توجه می‌کنیم که a_4 ، a_5 و a_6 سه جملهٔ متوالی این دنبالهٔ هندسی هستند، پس:

$$a_5^2 = a_4 \times a_6 \Rightarrow a_5^2 = x(4-x) \xrightarrow{(*)} a_5^2 = 2 \Rightarrow a_5 = \pm\sqrt{2}$$

با توجه به اینکه جملات دنباله مثبت هستند، تنها جواب $a_5 = \sqrt{2}$ قابل قبول است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۱ می‌دانیم ارتفاع وارد بر وتر از دو ضلع قائم کوچکتر است.



از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه می‌دانیم:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ و } a \times b = h \times c \quad (I)$$

$$h, a, b = \frac{a}{q}, a, aq \xrightarrow{I} \cancel{a}.(aq) = \frac{\cancel{a}}{q}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\to aq^2 = \sqrt{a^2 + a^2q^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2q^4 = a^2 + a^2q^2$$

$$\to q^4 - q^2 - 1 = 0$$

$$\to q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{q^2 \geq 0} q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲ با توجه به آن‌که ستون‌ها دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس جدول را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

a	8	b
aq	$8r$	$bs=6$
$aq^2=27$	$8r^2$	bs^2

با توجه به آن‌که سطرها دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند، پس روابط زیر برقرارند:

$1)\ a+b=16$

$2)\ aq+bs=16r$

$3)\ aq^2+bs^2=16r^2$

با تقسیم طرفین تساوی ۱ بر ۲ و طرفین تساوی ۲ بر ۳ خواهیم داشت:

$$\frac{a+b}{aq+bs}=\frac{aq+bs}{aq^2+bs^2}=\frac{1}{r}\Rightarrow a^2q^2+b^2s^2+abs^2+abq^2=a^2q^2+b^2s^2+2abqs$$

$$\Rightarrow abs^2+abq^2=2abqs\Rightarrow s^2+q^2=2qs\Rightarrow (q-s)^2=0\Rightarrow q=s$$

اگر در روابط ۱ و ۲ قرار دهیم $q=s$، به تساوی $q=r=s$ می‌رسیم.

طبق داده‌های سؤال

$$bs=6\Rightarrow bq=6\Rightarrow b^2q^2=36\qquad aq^2=27$$

با تقسیم روابط بالا به نتیجه $a=\frac{3}{4}b^2$ می‌رسیم. چون $a+b=16$، پس:

$$\frac{3}{4}b^2+b=16\Rightarrow\begin{cases}b=4\to a=12\\ b=\frac{-16}{3}\to a=\frac{64}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}=3,-4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** در تساوی $a_n=(a_3-6)n-a_1$، مقادیر $n=1$ و $n=3$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا از طریق یک دستگاه دو معادله‌ـ دو مجهول، مقادیر a_1 و a_3 را به دست آوریم:

$$n=1: a_1=a_3-6-a_1\ \Rightarrow\ a_3-2a_1=6\qquad (1)$$

$$n=3: a_3=(a_3-6)\times 3-a_1=3a_3-18-a_1\qquad (2)$$

گام دوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_3-2a_1=6\\ 2a_3-a_1=18\end{cases}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{cases}a_3-2a_1=6\\ -4a_3+2a_1=-36\end{cases}$$

$$\text{جمع}: -3a_3=-30\ \Rightarrow\ a_3=10$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}}\ 10-2a_1=6\ \Rightarrow\ a_1=2$$

گام سوم: حال با دانستن $a_1=2$ و $a_3=10$، جملهٔ عمومی دنبالهٔ a_n را به دست می‌آوریم:

$$a_n=\alpha n+\beta\ \Rightarrow\ \begin{cases}n=1: \alpha+\beta=2\\ n=3: 3\alpha+\beta=10\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\ \alpha=4,\beta=-2$$

گام چهارم: پس $a_n=4n-2$ است و حالا a_7 و a_{13} و سپس واسطهٔ حسابی آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$a_n=4n-2\ \Rightarrow\ \begin{cases}n=7: a_7=26\\ n=13: a_{13}=50\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \text{واسطهٔ حسابی (میانگین)}=\frac{a_7+a_{13}}{2}=38$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۴ **گام اول**: در هر مرحله، تعداد کل نقاط از رابطهٔ $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ به دست می‌آید.

دنبالهٔ مقابل هم تعداد نقاط توخالی در هر مرحله را نشان می‌دهد:

$$b_n : ۱,۱,۴,۴,۹,۹,... = \begin{cases} (\frac{n}{۲})^۲ & \text{زوج } n \\ (\frac{n+۱}{۲})^۲ & \text{فرد } n \end{cases}$$

c_n را نیز دنبالهٔ تعداد نقاط توپر در نظر می‌گیریم که برابر است با:

$$c_n = a_n - b_n$$

گام دوم: با توجه به این‌که اختلاف نقاط توپر و توخالی در مرحلهٔ بیستم خواسته شده، n زوج است و تعداد نقاط توپر برابر است با:

$$b_{۲۰} = (\frac{۲۰}{۲})^۲$$

$$c_{۲۰} = a_{۲۰} - b_{۲۰} = \frac{۲۰ \times ۲۱}{۲} - (\frac{۲۰}{۲})^۲ = ۲۱۰ - ۱۰۰ = ۱۱۰$$

گام سوم: پس اختلاف تعداد نقاط توپر و توخالی برابر است با $|c_{۲۰} - b_{۲۰}| = ۱۱۰ - ۱۰۰ = ۱۰$.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۵ **گام اول**: برای این‌که بدانیم دنبالهٔ a_n چند جملهٔ صحیح دارد، باید صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کنیم:

$$a_n = \frac{۴n^۲ + ۴n + ۱۹}{۲n - ۱} = \frac{(۴n^۲ + ۴n - ۳) + ۲۲}{۲n - ۱} = \frac{(۲n - ۱)(۲n + ۳) + ۲۲}{۲n - ۱} = ۲n + ۳ + \frac{۲۲}{۲n - ۱}$$

$$\begin{array}{l|l} ۴n^۲ + ۴n + ۱۹ & ۲n - ۱ \\ \cline{2-2} -(۴n^۲ - ۲n) & ۲n + ۳ \\ \hline ۶n + ۱۹ & \\ -(۶n - ۳) & \\ \hline ۲۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow ۴n^۲ + ۴n + ۱۹ = (۲n - ۱)(۲n + ۳) + ۲۲$$

گام دوم: حالا برای این‌که a_n عددی صحیح باشد، باید $\frac{۲۲}{۲n - ۱}$ عددی صحیح شود؛ پس:

$$۲n - ۱ = ۱ \Rightarrow n = ۱ \checkmark$$

$$۲n - ۱ = ۲ \Rightarrow n = \frac{۳}{۲} \times$$

$$۲n - ۱ = ۱۱ \Rightarrow n = ۶ \checkmark$$

$$۲n - ۱ = ۲۲ \Rightarrow n = \frac{۲۳}{۲} \times$$

پس فقط جملات $a_۱$ و $a_۶$ عددهای صحیح هستند، بنابراین ۲ جمله از دنبالهٔ a_n، شرایط خواسته‌شده را دارند.

توجه: از آن‌جا که $n \in \mathbb{N}$، بنابراین $۲n - ۱ > ۰$، پس کافی است تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۲۲ چک شوند.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۶ **گام اول**: دنبالهٔ درجه‌دوم t_n را به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم: عبارت $t_{n+1} - t_n$ را تشکیل می‌دهیم و برابر با عبارت داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$t_{n+1} - t_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c)$$

$$= \underbrace{a(n^2 + 2n + 1)}_{\cancel{an^2} + 2an + a} + \cancel{bn} + b + \cancel{c} - \cancel{an^2} - \cancel{bn} - \cancel{c} = 2an + a + b \underset{\text{از صورت سؤال}}{=} n + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

گام سوم: از طرفی $t_5 = 17$ است، پس داریم:

$$t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + c \Rightarrow t_5 = \frac{1}{2} \times 25 + \frac{3}{2} \times 5 + c = 17$$

$$\Rightarrow c = 17 - \frac{25}{2} - \frac{15}{2} = -3$$

پس $t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 3$ است.

گام چهارم: حالا جملهٔ دهم دنبالهٔ t_n را پیدا می‌کنیم:

$$t_{10} = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{3}{2} \times 10 - 3 = 50 + 15 - 3 = 62$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۷ **گام اول**: شرایط مسئله را می‌نویسیم. فرض می‌کنیم دنبالهٔ هندسی با جملات غیرثابت به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ و دنبالهٔ حسابی به صورت $b_n = b_1 + (n-1)d$ باشد:

دنبالهٔ هندسی: $a_1, a_2, a_4 \Rightarrow a_1, a_1 r, a_1 r^3$

دنبالهٔ حسابی: $b_1, b_3, b_7 \Rightarrow b_1, b_1 + 2d, b_1 + 6d$

گام دوم: جملات را نظیربه‌نظیر با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{cases} a_1 = b_1 \quad (*) \\ a_1 r = b_1 + 2d \\ a_1 r^3 = b_1 + 6d \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } (*)} \begin{cases} a_1 r - a_1 = 2d \\ a_1 r^3 - a_1 = 6d \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r - a_1}{2} = \frac{a_1 r^3 - a_1}{6} = d$$

$$\xrightarrow{\div a_1} 3(r-1) = r^3 - 1 \Rightarrow 3\cancel{(r-1)} = \cancel{(r-1)}(r^2 + r + 1) \Rightarrow r^2 + r + 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + r - 2 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} (r+2)(r-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 & \times \\ r = -2 & \checkmark \end{cases}$$

گام سوم: چون دنبالهٔ هندسی غیرثابت است، پس $r = -2$ قابل قبول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۸ با توجه به روابط بین جملات متساوی‌الفاصله در دنباله هندسی، در ابتدا داریم

$$(a_2)^2 = (a_1)(a_5)$$
$$\Rightarrow (\log_4 4x)^2 = (\log_2 2x)(\log_8 8x)$$
$$\Rightarrow (1+\frac{1}{2}\log_2 x)^2 = (1+\log_2 x)(1+\frac{1}{3}\log_2 x) \xrightarrow{\log_2 x = T} 1+\frac{T^2}{4}+T = 1+\frac{T}{3}+T+\frac{T^2}{3}$$
$$\frac{T^2}{12}+\frac{T}{3}=0 \Rightarrow \begin{cases} T=\log_2 x = 0 \Rightarrow x=1 \ \text{غقق} \\ T=\log_2 x=-4 \Rightarrow x=\frac{1}{16} \ \text{قق} \end{cases}$$

پس اگر q قدرنسبت دنباله هندسی باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \log_2 2x = \log_2 2^{-3} = -3 \\ a_3 = \log_4 4x = \log_4 4^{-1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_{17} = a_1 q^{16} = a_1 (q^2)^8 = (-3)(\frac{1}{3^8}) = \frac{-1}{3^7} = -3^{-7}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۹ دسته‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{2\},\{4,6\},\{8,10,12,14\},\{16,18,\dots,30\},\dots$$

کوچک‌ترین عدد دسته‌ها، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند:

$$t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 8, t_4 = 16, \dots$$

پس کوچک‌ترین عدد دستهٔ سیزدهم برابر $2^{13} = 8192$ و در نتیجه بزرگ‌ترین عدد دستهٔ دوازدهم برابر 8190 است

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰ قدر نسبت جملات مشترک برابر ۱۵ است.

$$\begin{cases} a_n = 3n-1 \\ b_n = 5n-1 \end{cases}$$

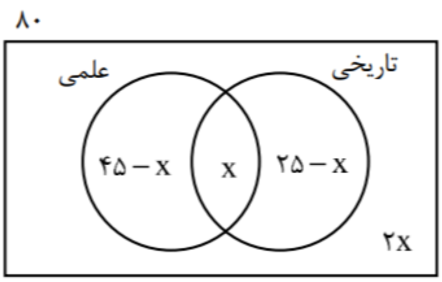
اولین جملهٔ مشترک برابر ۱۴ است.

دنبالهٔ جملهٔ مشترک:

$$C_n = 15n-1$$
$$C_n = b_{21} \Rightarrow 15n-1 = 104 \Rightarrow n = 7$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۱ فرض کنیم x نفر هر دو نوع کتاب را مطالعه کنند. با توجه به نمودار داریم:



$$45-x+x+25-x+2x=80$$
$$\Rightarrow 70+x=80 \Rightarrow x=10$$
$$n(\text{فقط علمی}) = 45-x = 35$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۲

$$a_n = An^2+Bn+C$$
$$\begin{cases} a_1 = A+B+C=4 \\ a_2 = 4A+2B+C=9 \\ a_4 = 16A+4B+C=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+B=5 \\ 12A+2B=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=3 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2n^2-n+3 \quad \sqrt{a_3 a_5} = \sqrt{18\times 48} = \sqrt{9\times 16\times 6} = 12\sqrt{6}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۳ الگوی درجهٔ دوم به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ است.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a + b + c = 0 \\ a_2 = 4a + 2b + c = 3 \end{array}\right\} \to 3a + b = 3 \to b = 3 - 3a$$

جملات $a_4 , 2 + a_3 , a_2$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. بنابراین:

$$a_2 + a_4 = 2(a_3 + 2) \to 3 + a_4 = 2a_3 + 4 \to a_4 - 2a_3 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \to (16a + 4b + c) - 2(9a + 3b + c) = 1 \to -2a - 2b - c = 1 \\ \text{می‌دانیم}: 4a + 2b + c = 3 \end{array}\right\}$$

$$\to 2a = 4 \to a = 2 \xrightarrow{❶} b = 3 - 6 = -3$$

$$\to c = -a - b = -2 + 3 = 1$$

خواهیم داشت:

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1 \to a_5 = 50 - 15 + 1 = 36$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۴ در واقع در هر مرحله یک قطر کامل مربع و بخشی از یک قطر دیگر مربع رنگ می‌شود. در مرحله n ام یک قطر با تعداد n مربع رنگ می‌شود و در مراحل زوج و فرد دقّت کنید گاهی نیم قطر و گاهی یک واحد کمتر از نیم قطر رنگ می‌شود. پس اگر a_n تعداد مربع رنگ شده باشد، آن‌گاه:

$$a_n = n + \left[\frac{n}{2}\right] \Rightarrow a_{20} = 20 + \left[\frac{20}{2}\right] = 20 + 10 = 30$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۵

$$a_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{3} \\ a_3 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + k\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + k\right)\left(\frac{1}{4} + k\right) \Rightarrow \cancel{k^2} + \frac{1}{9} + \frac{2k}{3} = \cancel{k^2} + \frac{3}{4}k + \frac{1}{8}$$

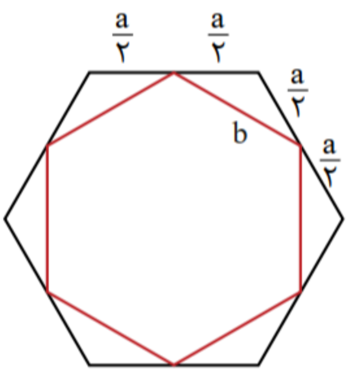
$$\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)k = \frac{1}{9} - \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{9-8}{12}k = \frac{-1}{72} \Rightarrow k = -\frac{1}{6}$$

$$\text{جملات دنباله هندسی}: \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{3} - \frac{1}{6}, \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{4}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12} \Rightarrow \text{هندسی } q = \frac{1}{2}, k = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow qk = -\frac{1}{12}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۶



$$b = \frac{\sqrt{3}a}{2} \text{ و } \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} S_1$$

$$S_2 = \frac{3}{4} \quad S_3 = \frac{9}{16} \quad S_4 = \frac{27}{64} \quad S_5 = \frac{81}{256} \quad S_6 = \frac{243}{1024}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۷

$$t_1 = a + b = -b \Rightarrow 2b = -a$$

$$t_2 = 4a + 2b = 4a - 2 \Rightarrow b = -1 , a = 2$$

$t_n = 2n^2 - n \Rightarrow$ اختلاف جملات: ۱ و ۶ و ۱۵ و ۲۸ $\Rightarrow$ اختلاف جملات: ۵/۹/۱۳/...

$$\underbrace{1 \quad 6}_{5}\ \underbrace{\quad 15}_{9}\ \underbrace{\quad 28}_{13}$$

اختلاف جملات متوالی الگوی درجه ۲ خود یک الگوی خطی هستند، پس اختلاف جملات متوالی یک الگوی خطی با قدر نسبت ۴ برابر است با: $a_n = 4n + 1$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۸

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 1$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5 = 39 \Rightarrow a_5 = 13$$

$$\left.\begin{matrix} a_5 = a_1 + 4d = 13 \\ a_2 = a_1 + d = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = 4 , a_1 = -3$$

$$\Rightarrow a_n = 4n - 7 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_3 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} t_1 = -3 \\ t_2 = 5 \end{matrix} \Rightarrow -2\begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2a = 11 \to a = \frac{11}{2} \xrightarrow{a+b=-3} b = \frac{-17}{2}$$

$$t_n = \frac{11}{2}n^2 - \frac{17}{2}n \Rightarrow t_{10} = 550 - 85 = 465$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۹

معادله را به صورت $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$ می‌نویسیم و با تغییر متغیر $x^2 = t$ داریم:

$$t^2 - (3m+2)t + m^2 = 0$$

این معادله باید برای t دو ریشهٔ مثبت t_2 و t_1 بدهد و برای x ریشه‌های $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ را خواهیم داشت؛ پس ریشه‌ها به‌ترتیب $\sqrt{t_1}$ و $\sqrt{t_2}$ و $-\sqrt{t_2}$ و $-\sqrt{t_1}$ هستند و از شرط دنبالهٔ حسابی داریم:

۲ (وسطی) = اولی + سومی $\Rightarrow 2\sqrt{t_2} = -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} \Rightarrow 3\sqrt{t_2} = \sqrt{t_1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t_1 = 9t_2$

پس در معادلهٔ $t^2 - (3m+2)t + m^2 = 0$ ریشهٔ بزرگ‌تر ۹ برابر ریشهٔ کوچک‌تر است:

$$\begin{cases} S = t_1 + t_2 = 3m + 2 \\ P = t_1 t_2 = m^2 \end{cases} \xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{t_1 = 9t_2} \begin{cases} 10\,t_2 = 3m + 2 \\ 9\,t_2^2 = m^2 \Rightarrow 3\,t_2 = m \Rightarrow t_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

با جای‌گذاری در معادلهٔ بالا داریم:

$$10\left(\frac{m}{3}\right) = 3m + 2 \Rightarrow \frac{m}{3} = 2 \Rightarrow m = 6$$

پس $m = 6$ و از معادلهٔ $t^2 - 20t + 36 = 0$ جواب‌های $t_1 = 18$ و $t_2 = 2$ را داریم؛ پس ریشه‌ها $\underbrace{\sqrt{18}}_{3\sqrt{2}}$ و $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و $-\sqrt{18}$ هستند که دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $2\sqrt{2}$ دارند و بنابراین:

$$\log_{m-2}^{d} = \log_4^{2\sqrt{2}} = \log_{2^2}^{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۰

اگر اعداد دسته‌ها را پشت سرهم در نظر بگیریم، تشکیل دنبالهٔ حسابی (الگوی خطـی) بـا قدر نسبت ۲ و جملهٔ اول ۲ می‌دهند. جملات را به‌صورت دنبالهٔ حسابی در نظر می‌گیریم:

$$\underset{1}{\{\overset{a_1}{2}\}},\underset{2}{\{\overset{a_2}{4},\overset{a_3}{6}\}},\underset{3}{\{\overset{a_4}{8},\overset{a_5}{10},\overset{a_6}{12}\}},\dots,\underset{30}{\{\overset{a_?}{?},\dots,\overset{a_?}{?}\}}$$

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_n=2+(n-1)\times 2=2n$$

حال باید سراغ به‌دست آوردن شمارهٔ جملات اول و آخر دستهٔ سی‌ام برویم. برای به‌دسـت آوردن جملهٔ آخر هر دسته کافیست تعداد اعداد دسته‌ها را تا آن دسته با هم جمع کنـیم (مثلاً شماره جملهٔ آخر دستهٔ سوم $1+2+3=6$ است.) پس شمارهٔ جملهٔ آخر دستهٔ سی‌ام برابر است با:

$$\text{شماره جملهٔ آخر دستهٔ سی‌ام} \Rightarrow 1+2+3+\dots+30=\frac{30\times 31}{2}=465$$

(یادآوری: $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$)

شمارهٔ اولین جملهٔ دستهٔ سی‌ام برابر است با:

$$(465-\underbrace{30}_{\text{تعداد جملات دستهٔ سی‌ام}})+1=436$$

$$a_{465}=2\times 465=930,\ a_{436}=2\times 436=872 \Rightarrow \text{واسطهٔ عددی}=\frac{a_{465}+a_{436}}{2}=901$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۱

گام اول: اعداد زیر، به ترتیب ۴ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی‌اند:

$$\overset{a_1}{a-b},\overset{a_2}{a+b},\overset{a_3}{\frac{a}{b}},\overset{a_4}{a\times b},\dots$$

> **نکته** در یک دنبالهٔ حسابی، اختلاف هر جملهٔ متوالی برابر قدرنسبت است.

با توجه به نکتهٔ بالا، داریم (d قدرنسبت دنباله است):

$$d=a_2-a_1=a+b-(a-b)=2b$$

گام دوم: از طرفی $a_3=a_2+d$ است؛ پس:

$$\frac{a}{b}=a+b+2b \Rightarrow \frac{a}{b}=a+2b \xrightarrow{\times b} a=ab+2b^2 \Rightarrow a-ab=2b^2 \Rightarrow a(1-b)=2b^2 \Rightarrow a=\frac{2b^2}{1-b}$$

گام سوم: باز می‌توانیم بنویسیم $a_4=a_3+d$:

$$a\times b=\frac{a}{b}+2b$$

به جای a قرار می‌دهیم $\frac{2b^2}{1-b}$:

$$\frac{2b^2}{1-b}\times b=\frac{\frac{2b^2}{1-b}}{b}+2b \Rightarrow \frac{2b^3}{1-b}=\frac{2b}{1-b}+2b \xrightarrow{\div b} \frac{2b^2}{1-b}=\frac{2}{1-b}+2$$

$$\xrightarrow{\times(1-b)} 2b^2=2+2-2b \Rightarrow 2b^2+2b-4=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} b=1 \\ b=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

طبق گفتهٔ سؤال $b\neq 1$؛ پس $b=-\frac{5}{3}$ است.

گام چهارم: در آخر از $a_5=a_4+d$ استفاده می‌کنیم:

$$a_5=a\times b+2b \overset{a=\frac{2b^2}{1-b}}{=\!=\!=} \frac{2b^2}{1-b}\times b+2b \overset{b=-\frac{5}{3}}{=\!=\!=} \frac{3\times\frac{25}{9}}{1-(-\frac{5}{3})}\times(-\frac{5}{3})+2(-\frac{5}{3})=\frac{\frac{-125}{9}}{\frac{8}{3}}-\frac{10}{3}=\frac{-125}{24}-\frac{10}{3}=\frac{-125-80}{24}=-\frac{205}{24}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۲

گام اول: اول رابطهٔ $\frac{a_{n+1}-2}{a_n+1}=2$ را ساده می‌کنیم: $\frac{a_{n+1}-2}{a_n+1}=2 \Rightarrow a_{n+1}-2=2a_n+2 \Rightarrow a_{n+1}=2a_n+4$

گام دوم: با توجه به $a_1=0$، چند جمله از این دنباله را می‌نویسیم:

$$a_{n+1}=2a_n+4 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_2=2a_1+4=2\times 0+4=4 \\ n=2 \Rightarrow a_3=2a_2+4=2\times 4+4=12 \\ n=3 \Rightarrow a_4=2a_3+4=2\times 12+4=28 \\ n=4 \Rightarrow a_5=2a_4+4=2\times 28+4=60 \\ \vdots \end{cases}$$

پس جمله‌های اول این دنباله به صورت مقابل هستند: $0,4,12,28,60,\dots$

گام سوم: این جمله‌ها را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $4\times 0,4\times 1,4\times 3,4\times 7,4\times 15,\dots$

پس:

$$\underbrace{4\times(2^0-1)}_{a_1},\underbrace{4\times(2^1-1)}_{a_2},\underbrace{4\times(2^2-1)}_{a_3},\underbrace{4\times(2^3-1)}_{a_4},\underbrace{4\times(2^4-1)}_{a_5},\dots$$

گام چهارم: پس جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $a_n=4\times(2^{n-1}-1)$ است؛ پس:

$$\Rightarrow a_{11}=4\times(2^{10}-1)=4\times 1023=4092$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۳

گام اول: b_1، b_2 و b_3 جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ هستند، پس می‌توانیم فرض کنیم $b_1=a$، $b_2=aq$ و $b_3=aq^2$ با شرط $q>1$. جمع این ۳ جمله برابر ۹۱ است:

$$\Rightarrow b_1+b_2+b_3=91 \Rightarrow a+aq+aq^2=91 \Rightarrow \underbrace{a+aq^2=91-aq}_{(*)}$$

گام دوم: b_1+25، b_2+27 و b_3+1 جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند؛ پس:

$$\text{دومی}\times 2=\text{سومی}+\text{اولی} \Rightarrow (b_1+25)+(b_3+1)=2\times(b_2+27)$$

از طرفی $b_1=a$، $b_2=aq$ و $b_3=aq^2$ است:

$$(a+25)+(aq^2+1)=2\times(aq+27) \Rightarrow a+aq^2+26=2aq+54$$

با توجه به $(*)$، به جای $a+aq^2$ قرار می‌دهیم $91-aq$:

$$\Rightarrow 91-aq+26=2aq+54 \Rightarrow 63=3aq \Rightarrow aq=21$$

گام سوم: دوباره از $(*)$ استفاده می‌کنیم:

$$a+\underbrace{aq^2}_{aq\times q}=91-aq \xrightarrow{aq=21 \Rightarrow q=\frac{21}{a}} a+21\times\frac{21}{a}=91-21 \Rightarrow a+\frac{441}{a}=70 \xrightarrow{\times a} a^2+441=70a \Rightarrow a^2-70a+441=0$$

$$\Rightarrow (a-63)(a-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ a=63 \end{cases}$$

گام چهارم: با توجه به این‌که $aq=21$ است، مقدار q را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a=7 \\ a=63 \end{cases} \xrightarrow{aq=21} \begin{cases} 7q=21 \Rightarrow q=3 \\ 63q=21 \Rightarrow q=\frac{1}{3} \end{cases}$$ غ‌ق‌ق چون $q>1$ است.

بنابراین $a=7$ و $q=3$ است.

گام پنجم: جملات دنبالهٔ حسابی را می‌نویسیم:

$$b_1+25,b_2+27,b_3+1 \xrightarrow{b_1=a,b_2=aq,b_3=aq^2} a+25\,,\,aq+27\,,\,aq^2+1 \xrightarrow{a=7\,,\,q=3} 32,48,64$$

$+16 \quad +16$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ حسابی ۱۶ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۴

گام اول: جملات دوم، ششم و سیزدهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب با a_1+d، a_1+5d و a_1+12d نمایش می‌دهیم.

گام دوم: این جملات به ترتیب سه جملهٔ اول یک الگوی درجه‌دوم، مثلاً $t_n=an^2+bn+c$ هستند:

$$t_1=a+b+c=a_1+d \quad (I) \qquad t_2=4a+2b+c=a_1+5d \quad (II) \qquad t_3=9a+3b+c=a_1+12d \quad (III)$$

گام سوم: حالا داریم:

$$(II-I) \Rightarrow \boxed{3a+b=4d} \quad (*) \qquad (III-II) \Rightarrow 5a+b=7d$$

این دو عبارت را از هم کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2a=3d \Rightarrow a=\frac{3d}{2}$$

گام چهارم: در $(*)$ به جای a قرار می‌دهیم $\frac{3d}{2}$:

$$\Rightarrow 3\times(\frac{3d}{2})+b=4d \Rightarrow \frac{9d}{2}+b=4d \Rightarrow b=-\frac{d}{2}$$

گام پنجم: حالا در I، به جای a قرار می‌دهیم $\frac{3d}{2}$ و به جای b قرار می‌دهیم $-\frac{d}{2}$:

$$\frac{3d}{2}-\frac{d}{2}+c=a_1+d \Rightarrow c=a_1$$

بنابراین جملهٔ عمومی الگوی درجه‌دوم به صورت $t_n=\frac{3d}{2}n^2-\frac{d}{2}n+a_1$ می‌شود.

گام ششم: جملهٔ دوازدهم الگوی درجه‌دوم برابر است با:

$$t_{12}=\underbrace{\frac{3d}{2}\times 144}_{216d}-\underbrace{\frac{d}{2}\times 12}_{6d}+a_1=a_1+210d \Rightarrow$$ جملهٔ ۲۱۱ام دنبالهٔ حسابی

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۵

نکتهٔ ۱: جملهٔ nام دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=t_1r^{n-1}$ است که در آن t_1 جملهٔ اول و r قدرنسبت می‌باشد. $(t_1, r\neq 0)$

نکتهٔ ۲: اگر اعداد a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آنگاه b واسطهٔ هندسی a و c است؛ یعنی $b^2=ac$.

دنبالهٔ حسابی را با t_n نمایش می‌دهیم. طبق فرض t_1، t_2 و t_4 جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، پس داریم:

$$(t_2)^2=t_1t_4 \Rightarrow (t_1+2d)^2=t_1(t_1+3d) \Rightarrow t_1^2+4d^2+4dt_1=t_1^2+3dt_1 \Rightarrow 4d^2=-dt_1$$

$$\xrightarrow{d\neq 0} 4d=-t_1 \Rightarrow t_1+4d=0 \Rightarrow t_5=0$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۵۶

دنبالهٔ حسابی به وجود آمده به صورت مقابل است: $2,-,-,-,-,-,k$

در این صورت جملات دوم، سوم و پنجم درج شده همان جملات سوم، چهارم و ششم دنباله حسابی می‌باشند که تشکیل دنبالهٔ هندسی داده‌اند.

$$a_3,a_4,a_6 \Rightarrow a_4^2=a_3a_6$$

$$\Rightarrow (2+3d)^2=(2+2d)(2+5d) \Rightarrow d^2+2d=0 \Rightarrow \begin{cases} d=0 \text{ غ ق ق (دنباله غیرثابت است)} \\ d=-2 \checkmark \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$2,0,-2,-4,-6,-8,-10$$

k برابر -10 و جملهٔ دوم درج شده -2 است.

$$\frac{-10}{-2}=5$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)